УДК 167.7 DOI: 10.18413/2408-932X-2024-10-2-0-3

**Пеньков В. Е.**

# Математическое понимание (герменевтические аспекты образовательной деятельности)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия; *penkov@bsu.edu.ru*

**Аннотация.** В статье рассматриваются вопросы математического понимания как образовательной практики выявления алгоритмических смыслов математических (математизированных) учебных текстов. Герменевтическая установка на следование «путеводной нити языка» (Г.-Г. Гадамер), как показывается, не может быть сужена до отношения к естественным языкам, присущего гуманитарным образовательным практикам. Насыщены «путеводными», ценностными, или вольно-практическими смыслами языки сотворенные, в том числе языки научного общения, многообразие которых консолидируется вокруг установки на математический язык, не сводимый к его знаковой всеобщности или содержащимся в нем необходимым образовательным смыслам. Это «общее место» математического понимания в образовательных практиках часто оказывается вне поля зрения практикующих педагогов, в дидактически отвлеченной позиции. В статье обосновывается возможность реабилитации герменевтической установки в математическом образовании в связи с ее развитием и упрочением при осмыслении предпосылок алгоритмического решения математических задач – при выявлении их предельных, неформализованных условий (потребности в дополнительном информировании, нестандартных приемах решения, переносе образовательного целеполагания в область межпредметных отношений или жизненного опыта и т. д.). Автором показывается и комментируется действенность герменевтической установки в математическом образовании на примерах решения задач по алгебре, геометрии и при построении математических моделей различных физических процессов. Актуализируется необходимость диалогически ответственной идентификации современного практикующего педагога-математика.

**Ключевые слова:** математическое образование; математическое понимание; герменевтическая установка; алгоритмические приемы; решение задач

**Для цитирования**: Пеньков В.Е: Математическое понимание (герменевтические аспекты образовательной деятельности) // Научный результат. Социальные и гуманитарные исследования. 2024. Т. 10. № 2. С. 29-37. DOI: 10.18413/2408-932X-2024-10-2-0-3

**V. E. Penkov**

**Mathematical understanding (hermeneutic aspects of educational activities)**

Belgorod State National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russian Federation; *penkov@bsu.edu.ru*

**Annotation.** The article discusses the issues of mathematical understanding as an educational practice of identifying the algorithmic meanings of mathematical (mathematized) educational texts. The hermeneutic orientation towards following the "guiding thread of language" (G.-G. Gadamer), as it is shown, cannot be narrowed to the attitude towards natural languages inherent in humanitarian educational practices. The "common place" of mathematical understanding in educational practices is: some of created languages (of scientific communication) being consolidated around the mathematical installation are not reducible to its sign universality or educational generalizations. But it often turns out to be outside the field of view of practicing teachers, in a didactically abstract position. The article substantiates the possibility of rehabilitating the hermeneutic attitude in mathematical education in connection with its development and strengthening in understanding the prerequisites for the algorithmic solution of mathematical problems (the need for additional information, non-standard solution techniques, transfer of educational goal setting to the area of interdisciplinary relationships or life experience, etc.). The author shows and comments on the effectiveness of the hermeneutic approach in mathematics education using examples of solving problems in algebra, geometry and in constructing mathematical models of various physical processes.

**Keywords:** mathematics education; mathematical understanding; hermeneutic attitude; algorithmic techniques; problem solving

**For citation**: Penkov V. E. (2024), "Mathematical understanding (hermeneutic aspects of educational activities)", *Research Result. Social Studies and Humanities*, 10 (2), 29-37 DOI: 10.18413/2408-932X-2024-10-2-0-3

**Введение**

Легендарный Гермес, давший имя широкому течению познавательной (в том числе и образовательной) деятельности, отличался характерной смекалистостью: не являясь богом предельных смыслов, он чаще всего был мастером и символической инстанцией перевода смыслов, практического прояснения «чужого» языка. На общеупотребительном языке современной дидактики это можно представить на уровне предметно-практического познания мира человека как субъекта деятельности, который переводит знание о связях, отношениях предметов и явлений в сферу своей субъективности с точки зрения их общечеловеческой значимости. Но это отвлеченно-дидактическое представление о миссии герменевтики, центрированное на ее познавательных или эпистемологических эффектах, требует телеологических, именно ценностно-практических корректив. Гермес действует не машинально, весьма осмысленно, пластика его смекалистости отливается в формах целесообразности, в конкретной нацеленности действия по переводу смыслов в личный план – присвоения чужого, вживания в него, преобразования его в свое. Как отмечает О.В. Курыло, «в самом общем виде герменевтика является не только искусством объяснения непонятных текстов, но и наукой по выявлению смысла, содержащегося в источниках информации и культуры в неявном виде» (Курыло, 2018:

18-19). Иными словами, герменевтика в своей дидактической заданности связана с личностным переоткрытием глубинных предпосылок целого образовательного опыта.

Несмотря на длительный период исторического существования герменевтики, накопленный в герменевтической традиции опыт личностно ориентированной и инструментально многоуровневой дидактики, с каждой новой дидактической эпохой герменевтическая установка как будто заново начинает свою историю. Секрет Полишенеля: для авторов многих современных школьных и вузовских учебников в области математики, естественных и инженерно-технических наук герменевтическая установка есть чаще всего нечто интуитивное, далекое от принятия ее как устойчивого условия успешной образовательной деятельности, на путеводной нити значимого для современного образования математического языка в его алгоритмической историчности. В советской школе это отчасти компенсировалось изучением логики (как аналитической пропедевтикой герменевтической установки); в настоящее время это вопрос является вполне частным для практикующего педагога; между тем, понимание изучаемого материала, дидактически подготовленного и предъявляемого на этом языке, оказывается проблематичным и именно образовательно острым. В индивидуализированном обществе, образовательно мобильном, непрерывном, при постоянном самообразовании и, с другой стороны, во все новых технологических волнах (введение в школьную систему Единого государственного экзамена, повышенное внимание к решению конкретных задач, развитие дистанционных форм обучения и т. д.) «ситуация в педагогике предельно усложнилась. Вопросы самоидентификации педагогической науки, обретения аутентичности с небывалой до этого остротой встали перед этой дисциплиной» (Лукацкий¸ 2016: 100).

Резко говоря, внимание к герменевтической установке связано с обеспечением педагогической безопасности в общем ценностно-смысловом горизонте образовательной деятельности. Еще в XIX веке Н.Н. Страхов, один из герменевтически проницательных русских мыслителей и педагогов, писал, насколько «легко убедиться, что уродливости и искажения в умственной жизни учащихся вовсе не легко исправляются»; однако, «при поспешности, с которою мы спешим сделать из отроков образованных людей при отсутствии порядка и строгой соразмерности, с возрастом мы доходим до самых печальных результатов» (Страхов, 1865).

**Основная часть**

Значение герменевтической установки в математике подробно освещено в монографии (Сотникова, Фефилова, Гоза, 2008) в теоретическом плане; герменевтические аспекты прикладных вопросов (что особенно важно для развития практического умения решать задачи) здесь почти не рассматриваются. Математика «предлагает общие и достаточно четкие модели для изучения окружающей действительности» (Гаджиев, 2015: 149); при этом эта «общность» достаточно часто не осмысливается учениками, и они не понимают смысловой структуры, «герменевтической логики» (Г. Липпс) решения конкретной задачи. Особенно ярко это проявляется при решении задач, где необходимо сделать какое-либо дополнительное преобразование (при решении задач по алгебре) или построение (при решении задач по геометрии), когда даже в методических пособиях приводится только алгоритм решения, но не обосновывается то или иное действие, и только когда получен ответ, ученик начинает понимать, зачем предпринимался тот или иной шаг в процессе решения задачи. Отвечая на вопрос ученика: «А зачем это надо делать?», учитель часто произносит фразу: «Потом увидите». В итоге ученик запоминает алгоритм решения конкретной задачи, но не видит смыслового горизонта рассуждений. И если ему попадается задача немного другого типа, он становится в тупик. Важно научить не решению конкретной задачи, а развить герменевтическую установку на решение – следование алгоритмическим приемам, которые можно использовать в разных образовательных условиях, понимая при этом, что в каждой конкретной ситуации они имеют событийно определенный смысл. К числу этих приемов относятся а) выявление дополнительной информации; б) изыскание нестандартных альтернатив; в) рассмотрение предельных случаев решения; г) процессуальный перенос понимания из одной образовательной области в другую (образовательно межпредметную или жизненную).

***Выявление дополнительной информации***

Хорошо известны стандартные геометрические задачи, где дополнительное построение очевидно. Такова, например, задача о трапеции, когда ее боковые стороны продлевают до точки пересечения. В результате получается два подобных треугольника и много дополнительных соотношений между элементами чертежа. А если при основании трапеции сумма углов равна 90°, получается два подобных прямоугольных треугольника, что дает более десятка дополнительных соотношений.

Более сложный пример. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты (рис. 1). При этом расстояние *AK* равно 1. Необходимо определить площадь нижнего квадрата со стороной *BC*.

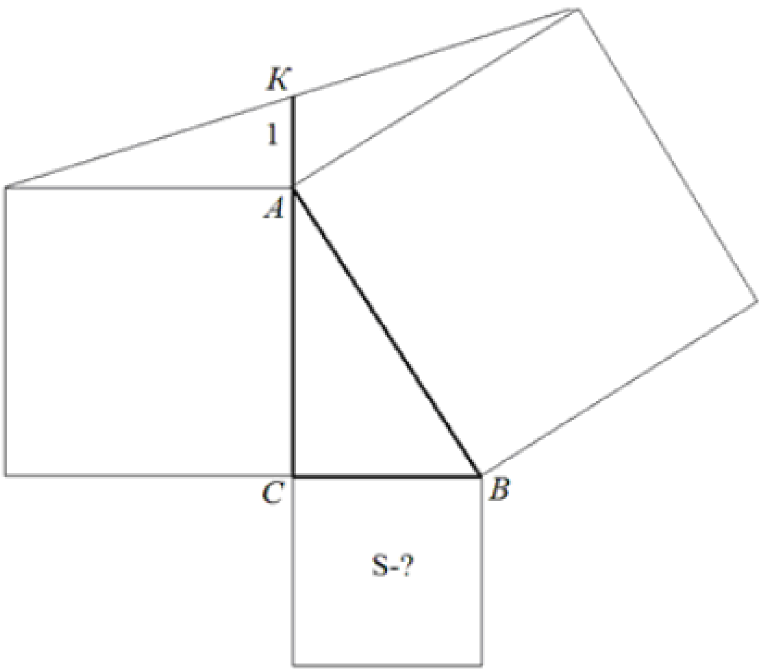


Рис. 1. Чертеж к условию задачи об определении площади квадрата (канал GetAClass – Просто математика: https://www.youtube.com/watch?v=N5fx2mSSUHI)
Fig. 1. Drawing for the problem of determining the area of a square (https://www.youtube.com/watch?v=N5fx2mSSUHI)

Задача сводится к тому, чтобы найти длину стороны *BC* и возвести ее в квадрат. Но из рисунка совершенно не понятно, как связаны отрезки *AK* и *BC*. Здесь можно предложить ученикам каким-то образом «повертеть» рисунок (или его элемент), чтобы указанные отрезки оказались элементами одной фигуры. Если никто не догадается, можно дать подсказку, что вращать надо треугольник, содержащий отрезок *AK*. В результате получим следующее (рис. 2). Отрезок *AK* перейдет в отрезок *AT* и, поскольку стороны квадрата *AC*=*AP*, будет являться средней линией треугольника *PCB*. А значит, $BC = 2$, и площадь нижнего квадрата равна 4.

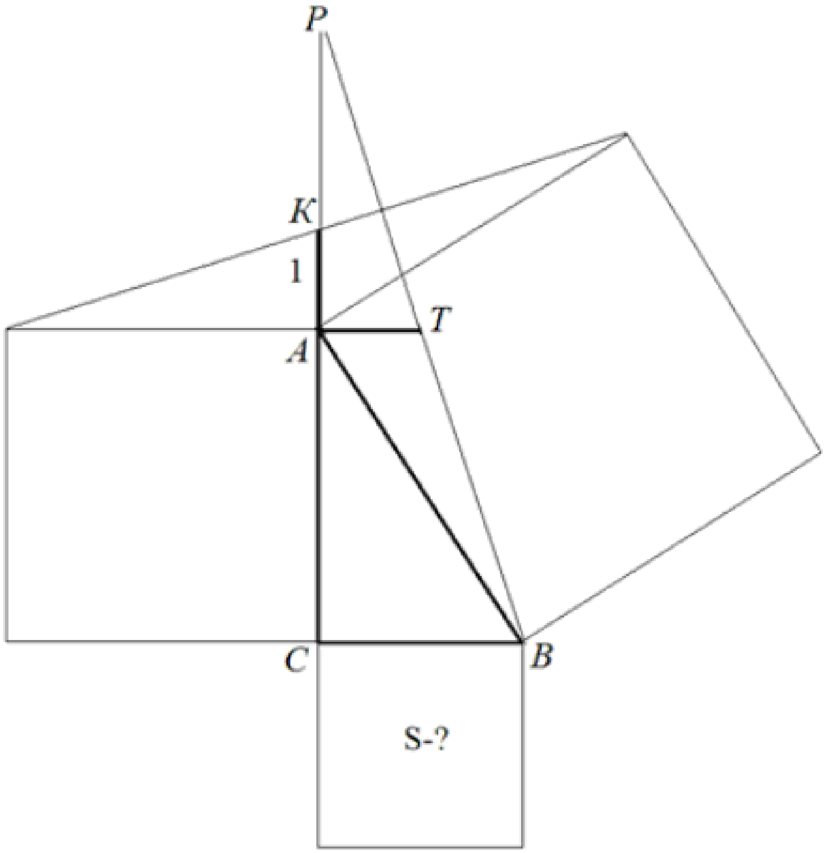


Рис. 2. Чертеж к решению задачи об определении площади квадрата (канал GetAClass – Просто математика: https://www.youtube.com/watch?v=N5fx2mSSUHI)
Fig. 2. Drawing for solving the problem of determining the area of a square (https://www.youtube.com/watch?v=N5fx2mSSUHI)

Конечно, если учащиеся не знакомы с методом поворота, эта задача им не по силам. Для этого нужны вышеназванные подсказки учителя. Если же этот метод им знаком, по всей видимости, большая часть класса сообразит, как надо повернуть элемент рисунка.

***Изыскание нестандартных альтернатив***

При решении уравнения $\sin 3x \cdot \cos 2x = 1$ стандартным будет алгоритмическое утверждение, что для решения тригонометрических уравнений необходимо привести его к такому виду, чтобы в нем присутствовали одинаковые функции и одни и те же аргументы. Придется использовать формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла – свести их к аргументу *x*. В итоге получится уравнение пятой степени, которое не решается в общем виде. Конечно, в подобных случаях бывает так, что авторы задачи специально подбирают значения чисел так, что уравнение будет иметь простой вид, или его будет легко разложить на множители. Но в данном случае необходимо использовать метод анализа области значений синуса и косинуса. Достаточно вспомнить, что значения синуса и косинуса располагаются в промежутке от минус единицы до плюс единицы. Поэтому произведение таких функций может давать единицу только в тех случаях, когда одновременно, то есть при одном и том же значении *x* равны либо единице, либо минус единице. Получаем системы уравнений $\begin{cases}\sin 3x = 1\\ \cos 2x = 1\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin 3x = -1\\ \cos 2x = -1\end{cases}$. По сути, эти уравнения являются простейшими, поэтому найти значения, стоящие под знаком тригонометрических функций очень легко, а затем решить обычное линейное уравнение, выразив неизвестную *x* для каждого уравнения и для каждой пары уравнений найти значения решений, которые пересекаются. Не останавливаясь на этих преобразованиях, приведём конечный результат

$x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, где $m \in Z$. Получить этот ответ стандартными способами невозможно. В то же время, знания, необходимые для решения нетривиальным способом, не выходят за рамки школьной программы, тем не менее, далеко не каждый ученик найдет подобный путь решения.

### *Рассмотрение предельных случаев решения*

Данный алгоритмический прием связан не столько с решением задач, сколько с пониманием целостного характера математического образовательного действия, что позволяет запоминать гораздо меньше необходимой информации (большую ее часть можно выводить из более общих закономерностей). Приведем только один пример. Теорема косинусов звучит так: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Но если угол между сторонами *a* и *b* является прямым, то есть треугольник прямоугольный, $\cos\gamma = 0$, мы получаем $c^2 = a^2 + b^2$, а это не что иное, как теорема Пифагора. А если гипотенуза *c* равна единице, то из определения синуса и косинуса острого угла получается основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$ Как показывает практика, очень немногие ученики, и даже не все учителя, осознают это.

### *Перенос понимания*

Приведем пример междисциплинарного характера – дидактико-герменевтической взаимности физики и математики, возможной при решении конкретной практической задачи.

Условие задачи таково. На берегу залива, который образует клин с углом $\alpha$ (рис. 3) живет рыбак. Его дом находится в точке *A*. Расстояние от точки *A* до ближайшей к ней точке залива *C* равно *h*, а расстояние до конца залива равно *l*. На другом берегу залива в точке *B* находится дом приятеля рыбака. Точка *B* расположена симметрично точке *A* относительно залива. В распоряжении рыбака имеется лодка. Определите минимальное время *t*, необходимое рыбаку, чтобы он из своего дома смог добраться до дома приятеля при условии, что рыбак может двигаться по суше со скоростью $\upsilon$ и плыть по заливу в лодке со скоростью в *n* раз меньшей.

На первый взгляд решение задачи должно осуществляться с помощью законов кинематики. В таком случае будет очень непросто определить траекторию движения, что, в свою очередь, затруднит использование формул. Но если перенести эту модель движения на оптические явления, мы получим преломление света в призме с углом $\alpha$. Физически это две различные модели, тем не менее их математическое описание одинаковое. Из оптики известно, что минимальная длина пути в подобных ситуациях соответствует прохождению света внутри призмы параллельно её основанию (рис. 4).

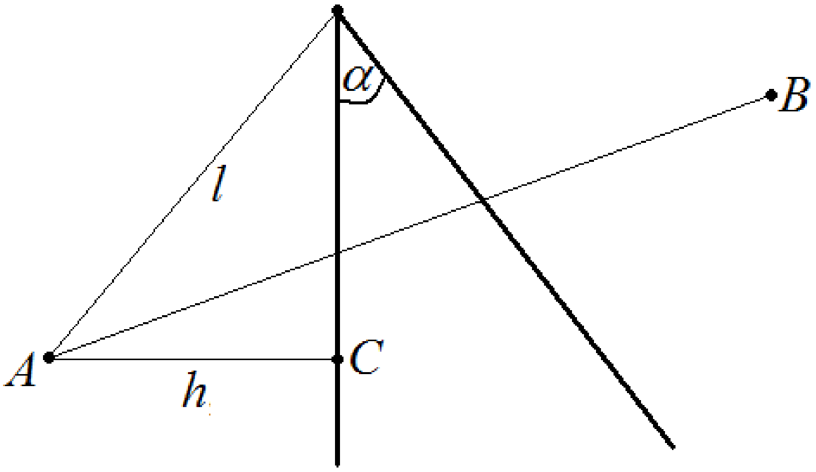


Рис. 3. Чертеж к условию задачи о рыбаке и его приятеле (чертёж автора)
Fig. 3. Drawing for the problem about a fisherman and his friend
(the drawing was created by the author of the article)

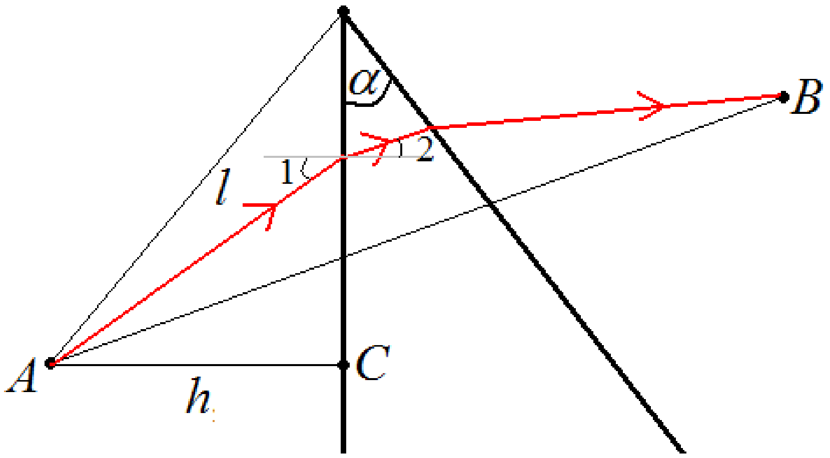


Рис. 4. Чертеж к решению задачи о рыбаке и его приятеле (чертёж автора)
Fig. 4. Drawing for solving the problem of a fisherman and a friend
(the drawing was created by the author of the article)

Для нахождения пройденного расстояния по суше и на лодке в воде остается решить геометрическую задачу, поделить на соответствующие скорости, и, тем самым, найти минимальное время движения, соответствующее данной траектории движения. Углы 1 и 2 (рис. 4) легко можно найти из закона преломления света. В итоге получим следующую формулу для определения минимального времени движения:

$$t = \frac{2h}{l} \cdot \left( \sqrt{1 - n^2 \cdot \sin^2 \alpha} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h} \cdot n \cdot \sin \alpha \right).$$

При этом, если использовать данные из оптики, нет необходимости доказывать, что время движения по этому пути будет минимальным. В противном случае необходимо считать производную, приравнивать ее к нулю и находить точку минимума функции времени от расстояния. А учитывая, что заранее нам неизвестна траектория движения, задача становится не решаемой.

Очень полезно проанализировать полученную формулу. При большом значении $n$ или угла $\alpha$ подкоренное выражение может получиться отрицательным. Это будет означать, что минимальное время будет только при движении по суше без использования лодки. То есть полученная формула здесь не работает, и ответ будет $t = \frac{2l}{l}$. Это уже другая математическая модель.

Приведем еще один более простой, но и более яркий пример, когда формула теряет смысл, и ее формальное применение без анализа и понимания реальной ситуации приводит к ошибке.

Рассмотрим задачу из сборника московских олимпиад (Кротов,1988: 6). Локомотив находился на расстоянии $x_0 = 400$ м от светофора и имел скорость $\upsilon_0 = 54$ км/ч, когда началось торможение. Определите положение локомотива относительно светофора через 1 минуту после начала торможения, если он двигался с ускорением $a =$ 0,3 м/с$^2$.

На первый взгляд задача кажется очень простой. Имеет место равнозамедленное движение, начальная координата (относительно светофора равна 400 м, начальная скорость 54 км/ч = 15 м/с. Движение идет против оси, направленной от светофора к локомотиву. Уравнение равнозамедленного движения в проекции на эту ось будет иметь вид: $x = x_0 - \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$. Подставляя данные из условия задачи, получим координату локомотива относительно светофора через 1 минуту или 60 секунд после начала движения (все величины необходимо перевести в систему СИ), получим 40 м. Однако, этот ответ ошибочен, хотя все формулы верны. Дело в том, что формула равнозамедленного движения описывает процесс непрерывно: когда скорость тела станет равной нулю, оно начнет двигаться с тем же по модулю ускорением, но в другую сторону. Но ведь локомотив, остановившись, не поедет в другую сторону, а останется на том же месте!

Решение необходимо разбить на два этапа. Найдем время торможения: $t = \frac{\upsilon}{a} = \frac{15\frac{\text{м}}{\text{с}}}{0{,}3\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 50\,\text{с}$. Значит, в формулу $x = x_0 - \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$ необходимо подставлять не 60, а 50 с, поскольку после 50 с модель равнозамедленного движения перестанет работать. Ответ будет 25 м.

Ошибка возникает из-за того, что при первом варианте решения задачи не учитывалась реальная ситуация (локомотив остановился и назад не поехал), которая после 50-ой секунды не вписывается в модель равнозамедленного движения.

**Заключение**

Заметные в примерах «общие места» математического понимания позволяют поставить вопрос о реабилитации герменевтической установки в математическом образовании в связи с осмыслением предпосылок алгоритмического решения математических задач – при выявлении их предельных, не-формализованных условий (потребности в дополнительном информировании, нестандартных приемах решения, переносе образовательного целеполагания в область межпредметных отношений или жизненного опыта и т. д.). Тем самым уточняется действенность герменевтической установки в математическом образовании и при построении математических моделей различных физических процессов. В самом общем виде этот вопрос актуализирует перспективу диалогически ответственной идентификации современного практикующего педагога-математика. Эффективное математическое образование в этой связи мыслится в ценностном горизонте, внутри языка математического общения, на его осевой, путеводной смысловой нити.

**Литература**

Гаджиев, М.Ш. Сущность математических идеализаций и роль таких идеализаций в системе наук // Австрийский журнал гуманитарных и общественных наук. 2015. № 3-4. С. 147-149.

Задачи московских физических олимпиад / под ред. С.С. Кротова. М.: Наука, 1988. 192 с.

Курыло, О.В. Герменевтический подход к современному образованию // Территория науки. 2018. № 5. С. 18-23.

Лукацкий, М.А. Становление педагогического знания в контексте философии науки // Историко-педагогический журнал. 2016. № 2. С. 87-100.

Сотникова, О.А., Фефилова, Е.Ф., Гоза, Н.И. Герменевтический подход к обучению математике (теоретический аспект): монография. Сыктывкар: Коми республиканская акад. гос. службы и управления КРАГСиУ, 2008. 285 с

Страхов, Н.Н. О методе естественных наук и значении их в общем образовании [Электронный ресурс] URL: http://az.lib.ru/s/strahow_n_n/text_1865_o_metode_estv_nauk_oldorfo.shtml (дата обращения 13.01.2024).

**References**

Gadzhiev, M. S. (2015). “The essence of mathematical idealizations and the role of idealizations in the sciences”, *Austrian Journal of Humanities and Social Sciences* 3-4, 147-149 (in Russ.).

Krotov, S. S. (1988) (ed.), *Zadachi moskovskih fizicheskih olimpiad* [Tasks of the Moscow Physical Olympiads], Nauka, Moscow, Russia (in Russ.).

Kurylo, O. V. (2018), “Hermeneutical approach to modern education”, *Territoriya nauki*, 5, 18-23 (in Russ.).

Lukatsky, M. A. (2016), “The formation of pedagogical knowledge in the context of the philosophy of science”, *Istoriko-pedagogicheskiy zhurnal*, 2, 87-100 (in Russ.).

Sotnikova, O. A., Fefilova, E. F. and Goza, N. I. (2008) *Germenevticheskiy podkhod k obucheniyu matematike (teoretichesky aspekt)* [Hermeneutic approach to teaching mathematics (theoretical aspect)], Publishing House of the Komi Republican Academy of Public Service and Management, Syktyvkar, Russia (in Russ.).

Strakhov, N. N. (1865), *O metode estestvennykh nauk i znachenii ikh v obshchem obra-zovanii* [On the method of natural sciences and their significance in general education], available at: http://az.lib.ru/s/strahow_n_n/text_1865_o_metode_estv_nauk_oldorfo.shtml (Accessed 13.01.2024), (in Russ.).

*Информация о конфликте интересов: автор не имеет конфликта интересов для деклараций.*

*Conflict of Interests: the author has no conflict of interests to declare.*

***ОБ АВТОРЕ:***

***Пеньков Виктор Евгеньевич***, доктор философских наук, кандидат педагогических наук, профессор кафедры информатики, естественнонаучных дисциплин и методики преподавания, факультет математики и естественнонаучного образования, Педагогический институт, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия; *penkov@bsu.edu.ru*

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=406060

ORCID: 0000-0003-4759-7978

***ABOUT THE AUTHOR:***

***Victor E. Penkov,*** Doctor of Philosophy, Candidate of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Informatics, Natural Sciences and Teaching Methods, Faculty of Mathematics and Natural Science Education, Pedagogical Institute, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russian Federation; *penkov@bsu.edu.ru*

ORCID: 0000-0003-4759-7978