КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
COMPUTER SIMULATION HISTORY

УДК 621.396.01 **DOI: 10.18413/2518-1092-2019-4-1-0-1**

Черноморец Д.А.[1]
Болгова Е.В.[1]
Черноморец А.А.[1]
Барсук А.А.[2]

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ БАЗИСА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦ КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

[1)] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы д. 85, г. Белгород, 308015, Россия
[2)] Общество с ограниченной ответственностью «АйТиДи», ул. Промышленная д. 6, г. Белгород, 308023, Россия

e-mail: Chernomorets@bsu.edu.ru

Аннотация
В работе предложен оригинальный ортонормированный базис, составленный из собственных векторов субполосных матриц косинус-преобразования, соответствующих заданной подобласти области определения косинус-преобразования. Показано разложение цифровых изображений по векторам предложенного базиса. Введено понятие базисных изображений в двумерном базисе собственных векторов субполосных матриц косинус-преобразования. Показаны свойства базисных изображений и коэффициентов разложения изображения Ф по предложенному базису. Приведены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих особенности распределения значений полученных коэффициентов разложения изображений.
Ключевые слова: изображение; косинус-преобразование; субполосные матрицы; коэффициенты разложения; собственные векторы.

UDC 621.396.01

Chernomorets D.A.[1]
Bolgova E.V.[1]
Chernomorets A.A.[1]
Barsuk A.A.[2]

IMAGES PRESENTATION BASED ON SUBBAND COSINE TRANSFORM MATRIX EIGENVECTORS BASIS

[1)] Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia
[2)] Limited Company "ITD", 6 Promyshlennaya St., Belgorod, 308023, Russia

e-mail: Chernomorets@bsu.edu.ru

Abstract
We propose an original orthonormal basis composed of the eigenvectors of subband cosine transform matrices corresponding to a given subdomain of the cosine transform definition domain. The decomposition of digital images onto vectors of the proposed basis is shown. The concept of basic images in the two-dimensional basis of eigenvectors of subband cosine transform matrices is introduced. The properties of the basis images and image decomposition coefficients according to the proposed basis are shown. The results of computational experiments that demonstrate the features of the distribution of the values of the obtained image decomposition coefficients are presented.
Keywords: image; cosine transform; subband matrices; decomposition coefficients; eigenvectors.

Распространение, обработка и использование изображений в электронной форме является неотъемлемой частью практически всех современных информационных систем. Во многих случаях целесообразно для анализа изображений применять их субполосный анализ-синтез на основе косинус-преобразования по дискретным данным [1]. В работах [2, 3] показано, что его для его осуществления используется математический аппарат субполосных матриц косинус-преобразования.

Рассмотрим представление изображений на основе базиса собственных векторов субполосных матриц косинус-преобразования. Пусть изображение задано в виде матрицы вещественных значений $\Phi=(f_{ik})$, $i=1,2,...,N_1$, $k=1,2,...,N_2$, элементы которой соответствуют яркости отдельных пикселей изображения.

Пусть заданной подобласти пространственных частот [4] $V_{r_1 r_2}$ (ППЧ) области определения косинус-преобразования соответствуют субполосные матрицы косинус-преобразования G_{r_1} и H_{r_2}, размерности $N_1 \times N_1$ и $N_2 \times N_2$ соответственно.

Субполосные матрицы косинус-преобразования G_{r_1} и H_{r_2} являются вещественными, симметричными матрицами, следовательно, их можно представить в виде следующих разложений:

$$G_{r_1} = Q_{r_1} L_{r_1} Q_{r_1}^T, \quad H_{r_2} = U_{r_2} M_{r_2} U_{r_2}^T, \tag{1}$$

где столбцы матриц Q_{r_1} и U_{r_2} являются собственными векторами матриц G_{r_1} и H_{r_2}, на главной диагонали матриц L_{r_1} и M_{r_2} расположены собственные числа матриц G_{r_1} и H_{r_2},

$$Q_{r_1} = (\vec{q}_1^{r_1}, \vec{q}_2^{r_1}, ..., \vec{q}_{N_1}^{r_1}), \quad U_{r_2} = (\vec{u}_1^{r_2}, \vec{u}_2^{r_2}, ..., \vec{u}_{N_2}^{r_2}), \tag{2}$$

$$L_{r_1} = diag(\lambda_1^{r_1}, \lambda_2^{r_1}, ..., \lambda_{N_1}^{r_1}), \quad M_{r_2} = diag(\mu_1^{r_2}, \mu_2^{r_2}, ..., \mu_{N_2}^{r_2}).$$

Рассмотрим матрицу $\Gamma^{r_1 r_2} = (\gamma_{ik}^{r_1 r_2})$, $i=1,2,...,N_1$, $k=1,2,...,N_2$,

$$\Gamma^{r_1 r_2} = Q_{r_1}^T \Phi U_{r_2}, \tag{3}$$

элементы $\gamma_{ik}^{r_1 r_2}$, $i=1,2,...,N_1$, $k=1,2,...,N_2$, которой представленные в виде

$$\gamma_{ik}^{r_1 r_2} = (\vec{q}_i^{r_1})^T \Phi \vec{u}_k^{r_2}, \tag{4}$$

можно считать значениями коэффициентов разложения [5] изображения Ф по ортогональным векторам $\vec{q}_i^{r_1}$, $i=1,2,...,N_1$, и $\vec{u}_k^{r_2}$, $k=1,2,...,N_2$, субполосных матриц косинус-преобразования G_{r_1} и H_{r_2}, соответствующих заданной подобласти пространственных частот (ПЧ) $V_{r_1 r_2}$.

Очевидно, что произведение матрицы коэффициентов разложения $\Gamma^{r_1 r_2}$ на матрицы Q_{r_1} и $U_{r_2}^T$, составленные из соответствующих собственных векторов, совпадает с изображением Ф,

$$\Phi = Q_{r_1} \Gamma^{r_1 r_2} U_{r_2}^T. \tag{5}$$

Представим правую часть соотношения (5) в виде произведения элементов соответствующих матриц,

$$Q_{r_1} \Gamma^{r_1 r_2} U_{r_2}^T = (\vec{q}_1^{r_1} \vec{q}_2^{r_1} ... \vec{q}_{N_1}^{r_1}) \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{r_1 r_2} \gamma_{12}^{r_1 r_2} ... \gamma_{1N_2}^{r_1 r_2} \\ \gamma_{21}^{r_1 r_2} \gamma_{22}^{r_1 r_2} ... \gamma_{2N_2}^{r_1 r_2} \\ ... \\ \gamma_{N_1 1}^{r_1 r_2} \gamma_{N_1 2}^{r_1 r_2} ... \gamma_{N_1 N_2}^{r_1 r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\vec{u}_1^{r_2})^T \\ (\vec{u}_2^{r_2})^T \\ ... \\ (\vec{u}_{N_2}^{r_2})^T \end{pmatrix} = (\vec{s}_1 \vec{s}_2 ... \vec{s}_{N_2}) \begin{pmatrix} (\vec{u}_1^{r_2})^T \\ (\vec{u}_2^{r_2})^T \\ ... \\ (\vec{u}_{N_2}^{r_2})^T \end{pmatrix},$$

где

$$\vec{s}_k = \sum_{i=1}^{N_1} \vec{q}_i^{\,r_1} \gamma_{ik}^{r_1 r_2}\,,\ k = 1,2,\ldots,N_2\,.$$

Тогда,
$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \gamma_{ik}^{r_1 r_2} \vec{q}_i^{\,r_1} (\vec{u}_k^{\,r_2})^T\,. \qquad (6)$$

Следовательно, изображение Φ можно представить (синтезировать) в виде суммы некоторых компонент (изображений) $X_{ik}^{r_1 r_2}$, $i = 1,2,\ldots,N_1$, $k = 1,2,\ldots,N_2$,
$$X_{ik}^{r_1 r_2} = \vec{q}_i^{\,r_1} (\vec{u}_k^{\,r_2})^T\,,\ i = 1,2,\ldots,N_1\,,\ k = 1,2,\ldots,N_2\,. \qquad (7)$$

Изображения $X_{ik}^{r_1 r_2}$, $i = 1,2,\ldots,N_1$, $k = 1,2,\ldots,N_2$, вида (7), которые образованы собственными векторами $\vec{q}_i^{\,r_1}$ и $\vec{u}_k^{\,r_2}$ субполосных матриц косинус-преобразования G_{r_1} и H_{r_2}, соответственно, предлагается называть базисными изображениями в двумерном базисе собственных векторов субполосных матриц косинус-преобразования, соответствующих заданной подобласти ПЧ $V_{r_1 r_2}$.

Исследуем свойства базисных изображений $X_{ik}^{r_1 r_2}$ (7), соответствующих собственным векторам $\vec{q}_i^{\,r_1}$, $i = 1,2,\ldots,N_1$, и $\vec{u}_k^{\,r_2}$, $k = 1,2,\ldots,N_2$, субполосных матриц косинус-преобразования G_{r_1} и H_{r_2}.

Базисные изображения $X_{ik}^{r_1 r_2}$, соответствующие собственным векторам $\vec{q}_i^{\,r_1}$, $i = 1,2,\ldots,N_1$, и $\vec{u}_k^{\,r_2}$, $k = 1,2,\ldots,N_2$, субполосных матриц косинус-преобразования G_{r_1} и H_{r_2}, имеют размерность $N_1 \times N_2$ пикселей.

Можно показать, что норма базисного изображения $X_{ik}^{r_1 r_2}$, $i = 1,2,\ldots,N_1$, $k = 1,2,\ldots,N_2$, равна 1,
$$\left\| X_{ik}^{r_1 r_2} \right\| = 1\,. \qquad (8)$$

Следовательно, значения коэффициентов разложения $\left\{ \gamma_{ik}^{r_1 r_2} \right\}$, $i = 1,2,\ldots,N_1$, $k = 1,2,\ldots,N_2$, можно использовать для формального описания их значимости с позиций различной степени отображения информации об изображении.

Можно показать, учитывая свойства разложений по ортогональным базисам, что энергия изображения [1] Φ может быть вычислена на основе значений коэффициентов разложения $\gamma_{ik}^{r_1 r_2}$, вида (4), $i = 1,2,\ldots,N_1$, $k = 1,2,\ldots,N_2$, используя следующее соотношение,
$$\left\| \Phi \right\|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} (\gamma_{ik}^{r_1 r_2})^2 = \left\| \Gamma^{r_1 r_2} \right\|^2. \qquad (9)$$

Значения коэффициентов разложения $\Gamma^{r_1 r_2}$ изображения Φ по собственным векторам субполосных матриц косинус-преобразования, соответствующих ППЧ $V_{r_1 r_2}$, позволяют аппроксимировать значения части энергии $E_{r_1 r_2}$ [1] изображения Φ в данной подобласти ПЧ.

Были выполнены вычислительные эксперименты для исследования величины значений коэффициентов разложения изображений в двумерном базисе собственных векторов субполосных матриц косинус-преобразования.

Рассмотрим изображение $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1,2,\ldots,N_1$, $k = 1,2,\ldots,N_2$. С целью повышения наглядности диаграмм, отображающих значения вычисляемых коэффициентов разложения (рисунок), размерность изображения Φ (без потери общности результатов) была выбрана 32×32 пикселей ($N_1 = N_2 = 32$).

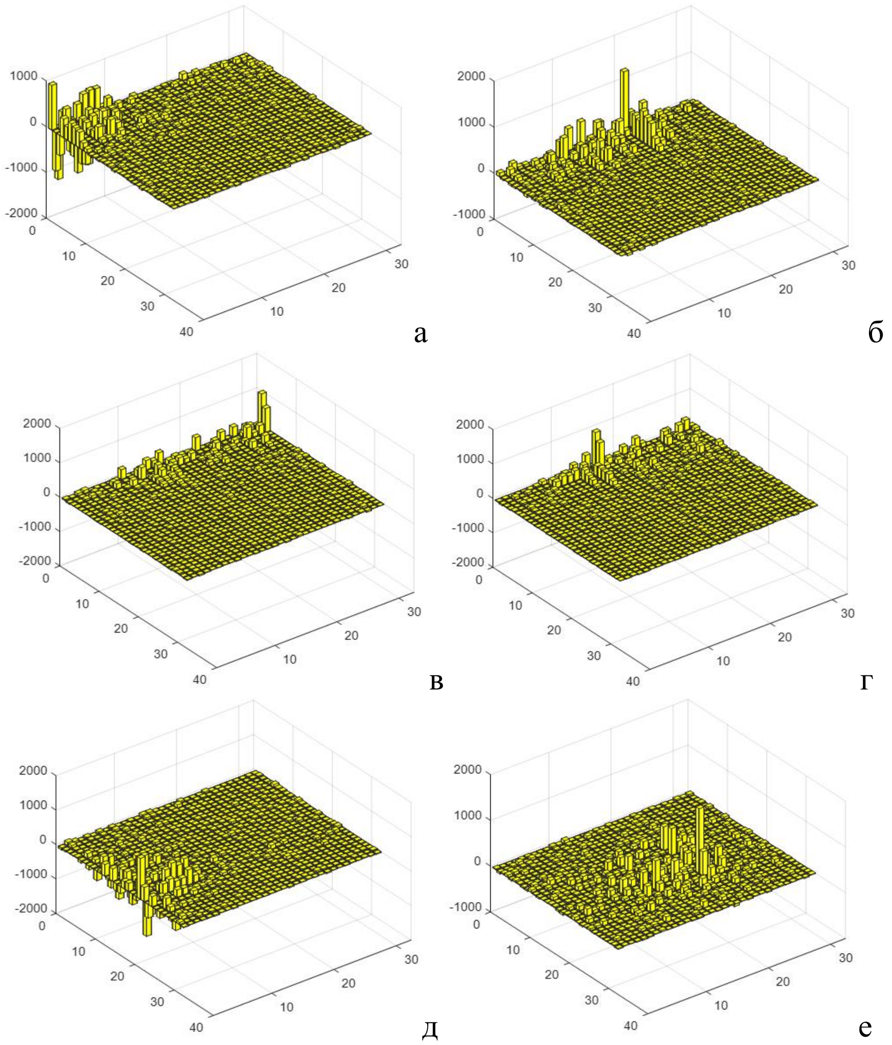

Рис. Диаграммы распределения значений коэффициентов разложения изображения Φ по собственным векторам субполосных матриц косинус-преобразования в соответствующих подобластях ПЧ $V_{r_1 r_2}$:

а – матрица Γ^{11}; б – матрица Γ^{12}; в – матрица Γ^{13}; г – матрица Γ^{14};

д – матрица Γ^{21}; е – матрица Γ^{22}

Fig. 1. Diagrams of the distribution of values of the coefficients of the decomposition of the image on the eigenvectors of subband matrices of the cosine transform in the corresponding subdomain of the $V_{r_1 r_2}$:

a – matrix Γ^{11}; b – matrix Γ^{12}; c – matrix Γ^{13}; d – matrix Γ^{14};

e – matrix Γ^{21}; f – matrix Γ^{22}

Представим область пространственных частот D_π, (область определения косинус-преобразования),

$$D_\pi = \{(u,v) \,|\, 0 \le u, v < \pi\}, \tag{10}$$

в виде объединения подобластей пространственных частот $V_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1,2,\dots,R_1$, $r_2 = 1,2,\dots,R_2$, прямоугольной формы. Количество ППЧ выбрано равным $R_1 = R_2 = 4$, что не влияет на общность получаемых результатов.

Для всех подобластей $V_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1,2,...,R_1$, $r_2 = 1,2,...,R_2$, были вычислены значения коэффициентов разложения изображения Φ по собственным векторам соответствующих субполосных матриц косинус-преобразования. На рисунке в виде диаграммы представлены значения коэффициентов разложения изображения Φ по собственным векторам соответствующих субполосных матриц косинус-преобразования в отдельных подобластях ПЧ V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{21} и V_{22} области определения косинус-преобразования (на диаграммах по осям координат указаны номера соответствующих собственных векторов).

Результаты вычислительных экспериментов показали, что значительное количество коэффициентов разложения имеет величину близкую к нулю. Визуально данное свойство подтверждается диаграммами, приведенными на рисунке 1. Указанное свойство коэффициентов разложения изображений может быть использовано при решении различных задач анализа и обработки изображений, в частности, в задаче сжатия и скрытного внедрения информации в изображения.

Таким образом, показано, что на основании собственных векторов субполосных матриц косинус-преобразования можно построить ортогональные разложения изображений. При этом пары собственных векторов соответствующих субинтервальных матриц образуют естественный двумерный базис. Исследованы свойства коэффициентов разложения изображений по парам собственных векторов субполосных матриц косинус-преобразования.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00657.

Список литературы

1. Черноморец, А.А. Об анализе данных на основе косинусного преобразования [Текст] / А.А. Черноморец, Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. – 2015. – № 1(198). – Вып. 33/1. – С. 68-73.

2. Болгова, Е.В. Свойства субинтервальных матриц двумерного косинусного преобразования [Текст] / Е.В. Болгова // Информационные системы и технологии. – 2017. – № 6(104). – С. 19-28.

3. Болгова, Е.В. О собственных числах субинтервальных матриц косинусного преобразования [Текст] / Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. – 2017 – № 2(251). – Вып. 41. С. 92-101.

4. Болгова, Е.В. О сосредоточенности энергии косинусного преобразования [Текст] / Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. – 2017. – № 9(258). – Вып. 42. – С. 111-121.

5. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов [Текст] / Н. Ахмед, К.Р. Рао. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

References

1. Chernomorets, A.A. On the analysis of data based on the cosine transformation [Text] / A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova // Scientific bulletins of the Belgorod State University. Economy. Information technologies. – 2015. – № 1(198). – Vol. 33/1. – pp. 68-73.

2. Bolgova, E.V. The properties of subinterval matrices for a two-dimensional cosine transform [Text] / E.V. Bolgova // Information systems and technologies. – 2017. – № 6(104). – p. 19-28.

3. Bolgova, E.V. About the eigenvalues of cosine transform subinterval matrices [Text] / E.V. Bolgova // Scientific bulletins of the Belgorod State University. Economy. Information technologies. – 2017 – No. 2(251). – Vol. 41. P. 92-101.

4. Bolgova, E.V. About cosine transform energy concentration [Text] / E.V. Bolgova // Scientific bulletins of the Belgorod State University. Economy. Information technologies. – 2017. – No. 9(258). – Vol. 42. – p. 111-121.

5. Ahmed, N. Orthogonal transformations in digital signal processing [Text] / N. Ahmed, K.R. Rao. – M.: Svyaz, 1980. – 248 p.

Черноморец Дарья Андреевна, магистрант кафедры математического и программного обеспечения информационных систем
Болгова Евгения Витальевна, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и информационных технологий
Черноморец Андрей Алексеевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры прикладной информатики и информационных технологий
Барсук Алексей Александрович, директор, Общество с ограниченной ответственностью «АйТиДи»

Chernomorets Daria Andreevna, master student, Department of Mathematical and Software Information Systems
Bolgova Evgeniya Vitalievna, Senior Lecturer, Department of Applied Informatics and Information Technologies
Chernomorets Andrey Alekseevich, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Applied Informatics and Information Technologies
Barsuk Alexey Alexandrovich, Director, Limited Company "ITD"